DISCREET EN MOOI

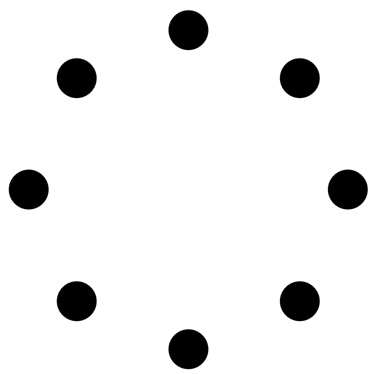
Inaugurele rede uitgesproken door

Willem H. Haemers

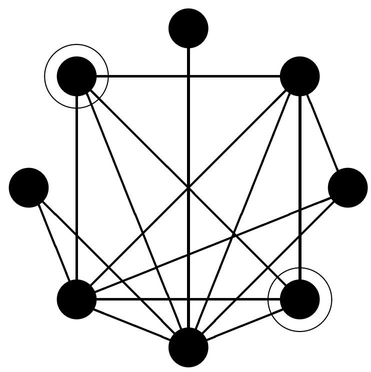
bij de aanvaarding van het ambt van
hoogleraar in de Discrete Wiskunde
aan de Universiteit van Tilburg op
4 september 2009.

Mijnheer de rector, beste mensen,

Straks, na afloop van deze rede, als ik 'ik heb gezegd' heb gezegd, is er een receptie. Hierbij zullen vele handen worden geschud. Sommigen, waaronder naar verwachting mijn vrouw Ank en ik, zullen veel handen schudden. Anderen misschien heel weinig. Er is niet veel structuur te verwachten in dit geschud. Toch valt hierover iets te zeggen. Er zullen namelijk altijd twee personen te vinden die na afloop van de receptie precies evenveel handen hebben geschud. Nu denkt u misschien dat Ank en ik dit wel zullen zijn, maar dat hoeft natuurlijk niet. Ank kan best even worden afgeleid, waardoor ze een hand mist, die ik wel schud. Bovendien, het is een wiskundige stelling en heeft niets van doen met sociaal gedrag (behalve dan de aanname dat niemand meer dan een keer dezelfde persoon een hand geeft). De stelling is onder alle omstandigheden waar, voor elk aantal receptiegangers (mits groter dan 1), ook als deze receptiegangers met een vooropgezet plan proberen de stelling te ontkrachten. Ik bedoel dat ik de stelling kan bewijzen, en dat zal ik doen. Laten we het aantal deelnemers N noemen. Als u dat te abstract vindt, mag u voor het gemak aannemen dat $N = 8$ (en denken aan het onderstaande plaatje).



Het bewijs is een zogenaamd bewijs uit het ongerijmde: we veronderstellen het tegendeel, namelijk dat iedere receptieganger een verschillend aantal handen schudt, en laten zien dat dat niet kan. Het aantal handen dat door een deelnemer wordt geschud kan variëren van nul tot en met $N - 1$ (van 0 t/m 7 in het plaatje). Het aantal mogelijkheden is precies gelijk aan N, het aantal deelnemers, en dus komt elke mogelijkheid één keer voor. Er is dus iemand die nul handen schudt, en iemand die alle andere deelnemers een hand geeft (laten we voor het gemak aannemen dat ik dat ben). Dan heeft dus iedereen mij een hand gegeven, maar dat kan niet want iemand had nul handen geschud. Dus is de veronderstelling fout en de stelling juist.

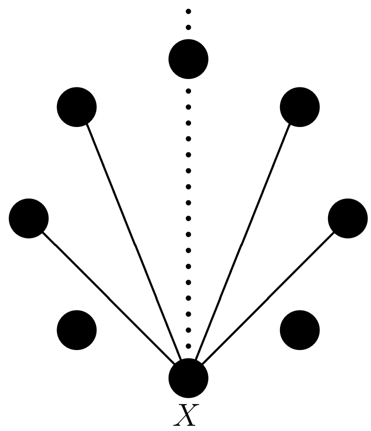


De zojuist bewezen stelling valt onder de grafentheorie, een centraal onderdeel van de discrete wiskunde. Een graaf (ook wel netwerk genoemd) bestaat uit een aantal knooppunten (of kortweg knopen), waarvan sommige met elkaar verbonden zijn. In ons receptievoorbeeld zijn de deelnemers de knooppunten, en zijn twee knooppunten verbonden als de deelnemers elkaar een hand hebben gegeven (zie figuur). Met deze terminologie kunnen we de stelling ook als volgt formuleren:

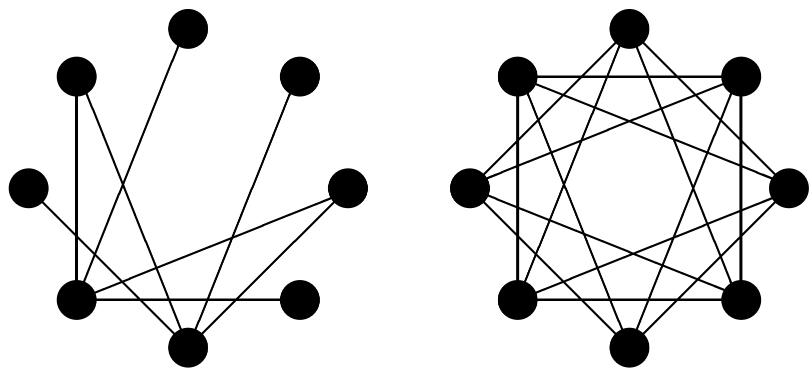
Stelling 1. In elke graaf (met meer dan een knoop) zijn twee knopen te vinden die met evenveel andere knopen verbonden zijn.

In de bovenstaande graaf zijn dat de twee gemarkeerde knooppunten. De stelling heeft iets geruststellends. Ze zegt dat er in een chaos altijd een beetje orde te vinden is, zelfs als iedereen probeert dit tegen te werken.

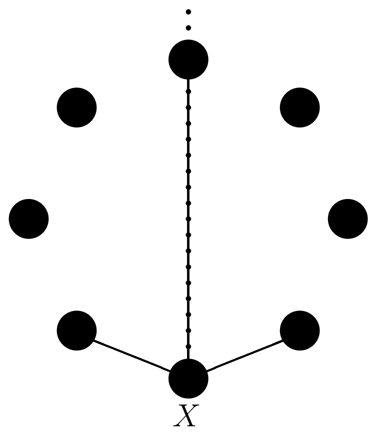
Laten we nu eens kijken wat we kunnen bereiken als iedereen zo goed mogelijk meewerkt. Kunnen we er bijvoorbeeld voor zorgen dat elke deelnemer precies vier handen schudt?



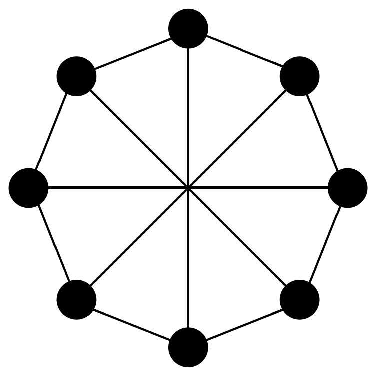
Dat lukt, en wel als volgt. Zet alle knooppunten gelijkmatig verdeeld in een cirkel. Kies een knoop X (zoals in de bovenstaande figuur). Verbindt X met vier andere knooppunten, maar zo dat de figuur symmetrisch wordt ten opzichte van de lijn door X en het middelpunt van de cirkel (de stippellijn).



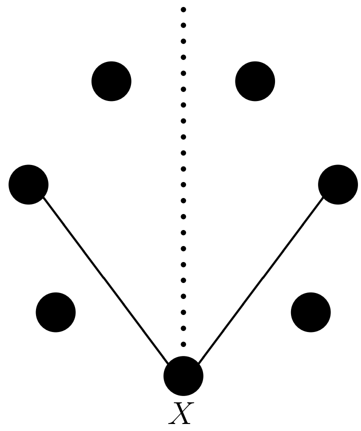
De overige verbindingen krijgen we door de beginsituatie te roteren (zie bovenstaande figuur). De geëiste symmetrie zorgt ervoor dat de verbindingen vertrekkend uit X samenvallen met verbindingen naar X, waardoor X met precies vier punten verbonden blijft. Hetzelfde geldt voor alle andere knooppunten, en dus is elk knooppunt met precies vier knooppunten verbonden. Kunnen we in deze constructie het getal 4 vervangen door elk ander getal K kleiner dan N? In het voorbeeld waarbij $N = 8$ kan dit wel. Als we bijvoorbeeld elk knooppunt met 3 knooppunten willen verbinden, kunnen we starten met de configuratie in de onderstaande figuur.



Na rotatie ontstaat dan de volgende graaf.



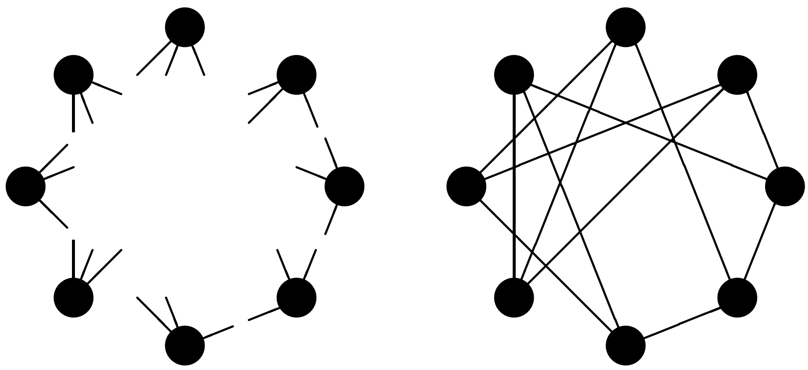
Bij oneven N is de gewenste symmetrie alleen mogelijk als K even is (zie onderstaande figuur).



Samenvattend kunnen we zeggen:

Stelling 2. Als K kleiner is dan N, en N en K zijn **niet** beide oneven, dan bestaat er een graaf op N knooppunten waarbij elke knoop met precies K andere knopen verbonden is.

De bovenstaande constructie is niet de enige. Er zijn vele andere manieren om een graaf te maken met zo'n eigenschap. De vraag rijst natuurlijk of er ook een constructie bestaat voor het geval N en K beide oneven zijn. Het antwoord hierop krijgen we door alle verbindingen te tellen. Uit elk knooppunt vertrekken K verbindingen (zie onderstaande afbeelding).



In totaal zijn er dus $K \times N$ vertrekkende verbindingen. Iedere verbinding heeft twee eindpunten en komt dus precies twee keer voor als vertrekkende verbinding. Dus het totaal aantal verbindingen is $(K \times N)/2$. Dit is blijkbaar een geheel getal. Dus is $K \times N$ even.

Stelling 3. Als N en K beide oneven zijn, bestaat er geen graaf met N knopen, waarbij elke knoop met precies K andere knopen verbonden is.

We hebben nu de volgende drie type stellingen gezien:

- Stelling 1: Een zekere mate van structuur is niet te vermijden.
- Stelling 2: Een gewenste structuur kan gerealiseerd worden.
- Stelling 3: Een gewenste structuur is niet mogelijk.

Ze zijn kenmerkend voor drie belangrijke typen resultaten uit de discrete wiskunde.

Misschien denkt u nu: 'dat is allemaal leuk en aardig, maar wat koop ik ervoor?' Dan heb ik in elk geval bereikt dat u het leuk en aardig vindt. Natuurlijk heeft de discrete wiskunde vele toepassingen. En daar zal ik straks meer over zeggen. Maar ik ben er bewust niet mee begonnen. Met deze voorbeelden heb ik geprobeerd iets mee te geven van het plezier en de ontroering die een sluitende redenering teweeg kan brengen. Want dat is voor mij de belangrijkste reden om onderzoek in de discrete wiskunde te doen. Omdat het mooi is. Natuurlijk, toepasbaarheid is belangrijk, maar draagt niet bij aan de schoonheid; zij werkt eerder vertroebelend. Juist door de abstracte vorm wint een stelling aan kracht. Zij wordt ongebonden en tijdloos. Stelling 1, 2 en 3 zullen overal en altijd, tot in de eeuwigheid geldig blijven, en zijn ook altijd geldig geweest, zelfs ver voor het bestaan van mensen en recepties.

Maar laat ik, zoals beloofd, meer zeggen over toepassingen. De leerstoel Discrete Wiskunde is weliswaar mooi en ontroerend, maar staat toch met vier poten op de grond. Hier zijn drie van de vier poten.

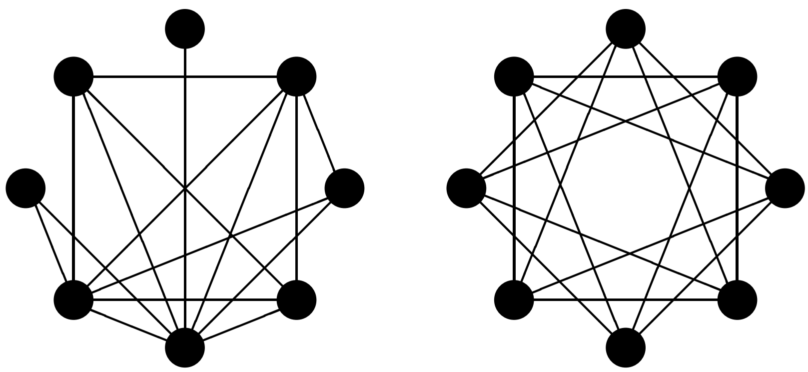
1. Coderingstheorie. Het bedenken en analyseren van goede codeer- en decodeerformules. Bij vrijwel alle opslag en transport van digitale in-

formatie wordt gecodeerd. Dit om storingen te ontdekken en te verbeteren, of om informatie te beschermen. Dit laatste is van levensbelang bij alle digitale financiële transacties.

2. Operationele research. Het optimaliseren van bedrijfsprocessen. Bijvoorbeeld bij belading en routering van vrachtauto's bij een transportbedrijf, bij het bepalen van de assemblagevolgorde in een productieproces, of bij het maken van een de dienstregeling voor de Nederlandse Spoorwegen.

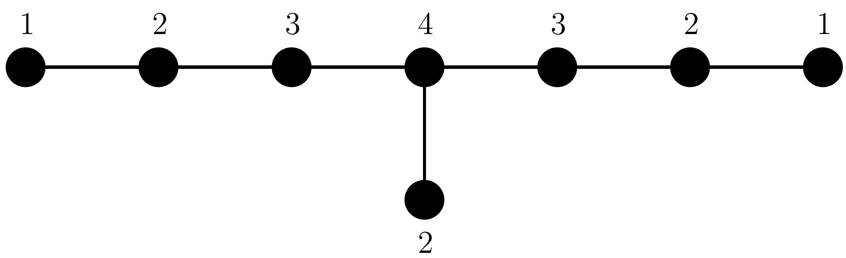
3. Kansrekening en statistiek. Om kansen te berekenen moet geteld worden, en tellen is combinatoriek, dat wil zeggen: discrete wiskunde. Bij sommige proefopzetten spelen gebalanceerde schema's een essentiële rol. Met discrete wiskunde kunnen dergelijke schema's gemaakt worden. Ik zal dit toelichten met een voorbeeld.

Een abdij wil een nieuw soort bier op de markt brengen. De brouwmeester heeft acht kandidaat bieren gemaakt. Een ervan zal het nieuwe product worden. Het is aan de monniken om te bepalen welke van de acht het beste smaakt. Er zijn 16 monniken. Elke monnik proeft slechts twee varianten, en beslist welke hij het lekkerste vindt. Op grond van de bevindingen van de 16 monniken wordt besloten welke kandidaat gekozen wordt. Het spreekt voor zich dat daarvoor een gebalanceerd schema nodig is.

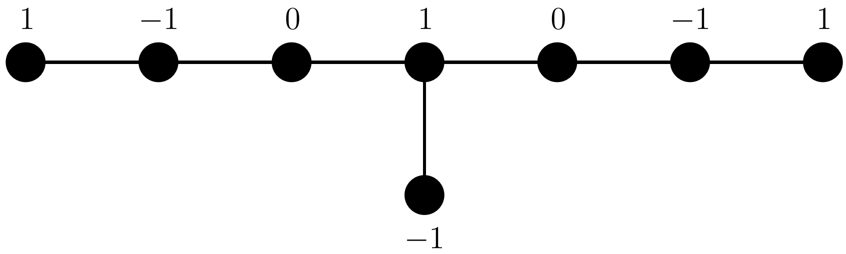


In dit voorbeeld wordt het schema gegeven door een graaf. De knooppunten zijn de varianten en een verbinding tussen twee knopen correspondeert met een monnik die de twee bijbehorende varianten vergelijkt. Niet elke graaf is even geschikt als proefschema. Welke structuur hiervoor het meest geschikt is, hangt af van het criterium dat de uitslag bepaald. Maar het zal duidelijk zijn dat de rechtergraaf in de bovenstaande figuur een beter bruikbare testuitslag zal geven dan de linker. Voor dit soort proeven moeten grafen worden geconstrueerd waarvoor een bepaalde regelmatige structuur gewenst is. Misschien vindt u bier proeven niet zo'n belangrijk voorbeeld, maar proefopzetten van dit type worden ook gebruikt bij het testen van geneesmiddelen, experimenten waarbij men met weinig proefpersonen een zo nauwkeurig mogelijk resultaat wil.

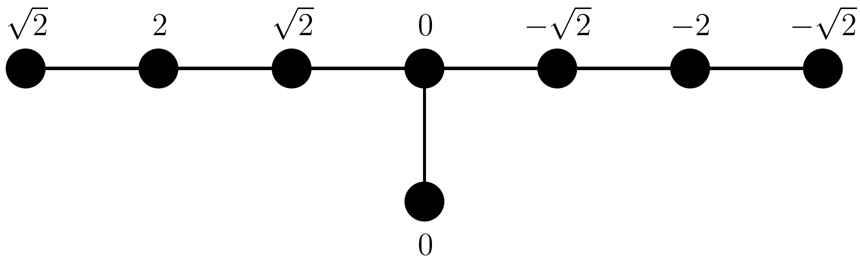
U heeft van mij nog een vierde toepassingspoot tegoed. Daarvoor moet ik eerst wat vertellen over mijn specialisatie. Over de algebraïsche grafentheorie, in het bijzonder over de relatie tussen grafen en eigenwaarden. Ingewijden weten dat het lastig is dit op een eenvoudige manier uit te leggen. Maar ik ga het toch proberen. Bekijk daartoe de volgende graaf:



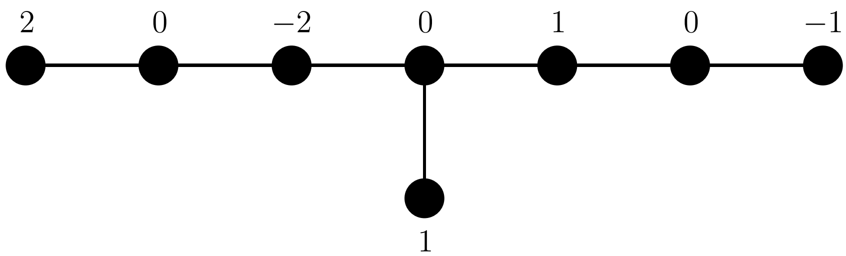
Bij elk knooppunt staat een getal. Deze getallen hebben een bijzondere eigenschap. In elk knooppunt is de som van de getallen van de ermee verbonden knopen (kortweg buren genoemd) gelijk aan 2 maal het getal van dat knooppunt. Bijvoorbeeld bij het middelste knooppunt staat een 4. Dat knooppunt heeft drie buren en de som van de getallen van die buren is $3 + 3 + 2 = 8$ en dat is inderdaad 2 maal de waarde in de knoop zelf. Zo ook heeft het derde knooppunt waarde 3, terwijl de som van de waarden van de buren gelijk is aan $2 + 4 = 6 = 2 \times 3$. De rij getallen bij de punten noemt met een eigenvector, en de waarde 2, waarmee wordt vermenigvuldigd heet eigenwaarde. Een graaf heeft meerdere eigenvectoren en eigenwaarden. Hier is een eigenvector met eigenwaarde -1.



Inderdaad, de som van de getallen van de buren van een knooppunt is steeds gelijk aan de waarde in dat knooppunt vermenigvuldigd met -1. Hieronder staat een eigenvector met eigenwaarde $\sqrt{2}$.



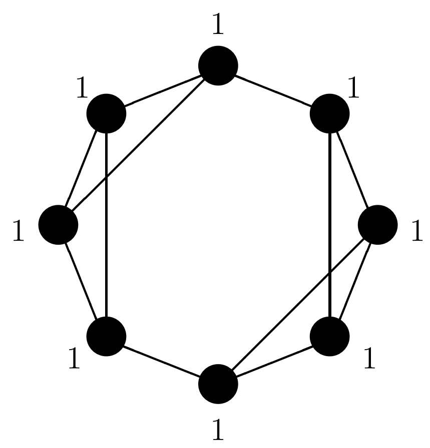
En hier is nog een eigenvector.



De bijbehorende eigenwaarde is 0. Kunnen we zo doorgaan? Ja, maar niet erg lang. Het aantal verschillende eigenwaarden is klein. De bovenstaande graaf heeft zeven verschillende eigenwaarden, namelijk

$$-2,\ -\sqrt{2},\ -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{2},\ 2.$$

De definities lijken misschien ver gezocht, maar dat zijn ze niet. Eigenwaarden en eigenvectoren kunnen in een algemenere context gedefiniëerd worden, en spelen een natuurlijke en centrale rol in de theorie van lineaire afbeeldingen, een belangrijk onderdeel van de algebra. Er is veel over bekend, en er is zeer veel werk aan verricht. Zo kan men aantonen dat het aantal verschillende eigenwaarden niet groter is dan het aantal knooppunten. Verder zijn er snelle methodes om eigenwaarden en bijbehoren eigenvectoren numeriek te bereken. Beter gezegd, om ze te benaderen, want de exacte waarden zijn lang niet altijd te bepalen. Hier komt nog een voorbeeld.



Nu van een graaf waarbij elk knooppunt drie buren heeft. Bij elke knoop staat een 1. De som van de waarden van de buren van een knoop is dus steeds gelijk aan het aantal buren. Dus is 3 de bijbehorende eigenwaarde. In het algemeen krijgen we:

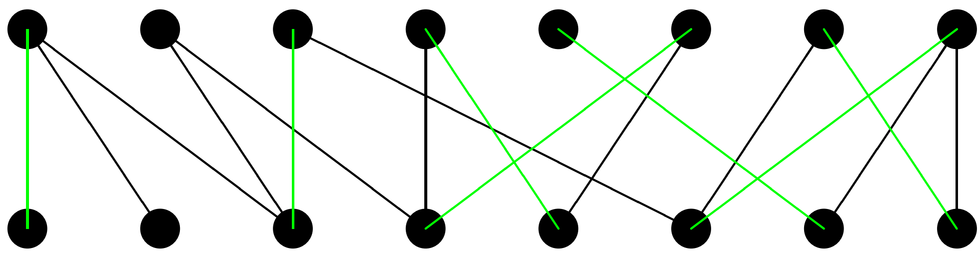
Stelling 4. Als elk punt precies K buren heeft, dan is K een eigenwaarde. Bovendien kan men aantonen dat K de grootste eigenwaarde is.

Het gebruik van eigenwaarden en eigenvectoren in de grafentheorie begon ruim 50 jaar geleden en komt uit de scheikunde. Er is namelijk een direct verband tussen de energie van een koolwaterstofmolecuul en de eigenwaarden van de onderliggende graaf. Daarna raakten wiskundigen geïnteresseerd, en bleken er duidelijke verbanden tussen eigenwaarden, eigenvectoren en structuureigenschappen van de graaf. Veel stellingen van type 3 (een bepaalde gewenste structuur is onmogelijk) zijn bewezen met behulp van eigenwaarden. Er werd behoorlijk wat theorie ontwikkeld, en er kwamen nieuwe toepassingen. En die vormen de beloofde vierde poot van de leerstoel: Analyse van grote netwerken. Gecompliceerde structuren laten zich vaak goed modelleren als een graaf. Men is dan geïnteresseerd in structurele kenmerken van zo'n graaf, zoals samenhang en expansie-eigenschappen. Deze grafen zijn te groot (vele miljoenen knopen) om dergelijke structurele eigenschappen goed te analyseren. Het werken met algebraïsche kenmerken gaat een stuk gemakkelijker, en verbanden tussen structuureigenschappen en algebraïsche eigenschappen zijn dan ook belangrijker dan ooit. Zo geeft het verschil tussen de grootste en de tweede eigenwaarde een goede maat voor de samenhang. Hoe groter het verschil hoe sterker de samenhang. Aanstaande dinsdag (8 september 2009) zal Huijuan Wang in Delft haar proefschrift 'Robustness of Networks' verdedigen. Dat mij is gevraagd in de promotiecommissie zitting te nemen, komt door de belangrijke rol van eigenwaarden in haar onderzoek.

Een andere interessante grootheid is de eigenvector behorend bij de grootste eigenwaarde. Deze eigenvector heeft een belangrijke toepassingen in het ordenen van pagina's van het internet. Google ordent internetpagina's met behulp van de zogenaamde Page rank (genoemd naar Larry Page, een van de oprichters van Google). Populaire pagina's krijgen een hoge Page rank. De exacte procedure is niet openbaar, maar is gebaseerd op het volgende idee. Maak een graaf. De knooppunten zijn alle internetpagina's. Twee knopen worden verbonden als er een link is van de een naar de ander. Een goede graadmeter voor de populariteit lijkt het aantal buren van een knoop, maar dat is niet goed genoeg. Er zijn namelijk erg veel knooppunten met hetzelfde aantal buren. Minstens twee, volgens onze eerste stelling, maar in deze werkelijkheid zijn het er veel meer. Bovendien wil men populaire buren (dat zijn buren met veel buren) zwaarder tellen dan minder populaire. Nu blijkt dat een ordening volgens de eigenvector van de grootste eigenwaarde zeer goed aan de gewenste eigenschappen voldoet. Het bepalen van die eigenvector voor een graaf van dergelijke omvang is tijdrovend, maar niet onmogelijk. Als u met Google zoekt, dan verschijnt er over het algemeen een lange lijst van pagina's. De volgorde waarin die verschijnen wordt (mede) bepaald door de Page rank. Bijvoorbeeld, bij de zoekterm 'discreet en mooi' verscheen vorige maand nog bovenaan de link 'escortservice'. De eerste link naar deze oratie stond toen op de zesde plaats. Ik nodig u uit zelf na te gaan of ik inmiddels populairder ben dan de escortservice. Bovendien heeft u dan een goede uitvlucht, als u echt in een escortservice geïnteresseerd mocht zijn.

Nu we het toch over zoekmachines hebben, zij zijn ook een ideaal hulpmiddel om op te zoeken waar en door wie er gebruik wordt gemaakt van jouw resultaten. Zo vond Google verwijzingen naar mijn werk in een artikel in een biochemisch tijdschrift over RNA moleculen [3], in een artikel over patroonherkenning [7], in een verhaal over de structuur van P2P netwerken [6], en (en die vond ik erg leuk) in een publicatie over het indexeren van muziek [5]. Waarom vertel ik dit? Alle genoemde artikelen gaan over toepassingen waaraan ik geen moment heb gedacht. Deze zoekresultaten geven aan dat theoretisch onderzoek van praktisch nut kan blijken te zijn, en dat de toepassingsgebieden soms onvoorspelbaar en gevarieerd zijn. Misschien wel gevarieerder dan bij praktijkgericht onderzoek, omdat hier de praktijk de theorie zoekt, en niet andersom.

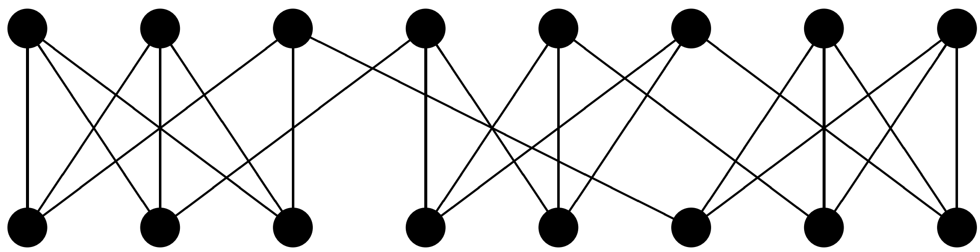
Om een beeld te krijgen van mijn onderzoek wil ik u deelgenoot maken van een resultaat, dat recentelijk is gepubliceerd met medeauteurs Sebi Ciaobă en David Gregory [2] en voortbouwt op een eerdere publicatie met Andries Brouwer [1]. Het gaat over een discreet probleem dat zich goed laat uitleggen aan de hand van een partnerkeuzeprobleem (het is dus discreet in meerdere opzichten). Bij een bemiddelingsbureau voor partnerkeuze is een aantal mannen en vrouwen ingeschreven. Op grond van de verstrekte gegevens maakt het bureau een graaf. De mannen en vrouwen zijn de knooppunten (zie de onderstaande figuur). We nemen aan dat de bovenste knooppunten de vrouwen zijn, en de onderste de mannen.



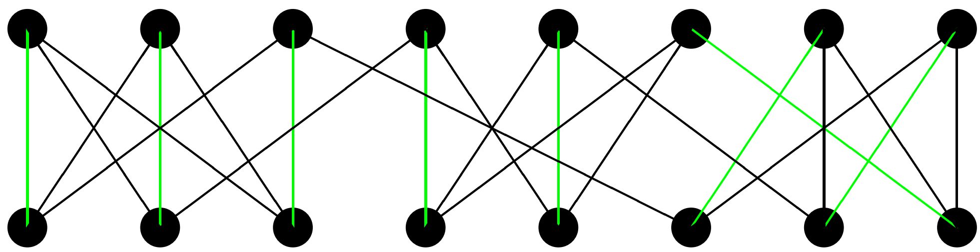
Twee knooppunten worden verbonden als het tweetal een passend koppel vormt. De graaf die we krijgen wordt bipartiet of ook wel tweedelingsgraaf genoemd. Dat wil zeggen dat er geen verbindingen zijn tussen de vrouwen onderling, en tussen de mannen onderling. Alleen verbindingen tussen man en vrouw zijn mogelijk. In het algemeen is het zo dat er voor een persoon meerdere passende partners zijn. Het bureau wil zoveel mogelijk gelukkige paren maken bestaande uit passende koppels. De groene verbindingen in bovenstaande figuur geven zo'n mogelijke koppeling. In de ideale situatie is er voor iedereen een partner. We spreken dan van een perfecte koppeling. Een perfecte koppeling is niet altijd te vinden. In het bovenstaande voorbeeld lukt dit niet omdat er voor de eerste twee mannen maar een vrouw in aanmerking komt. In 1916 bewees de Hongaarse wiskundige Dénis König de volgende stelling (zie [4]).

Stelling 5. Als in een tweedelingsgraaf elk knooppunt met evenveel andere knooppunten verbonden is, dan bestaat er een perfecte koppeling.

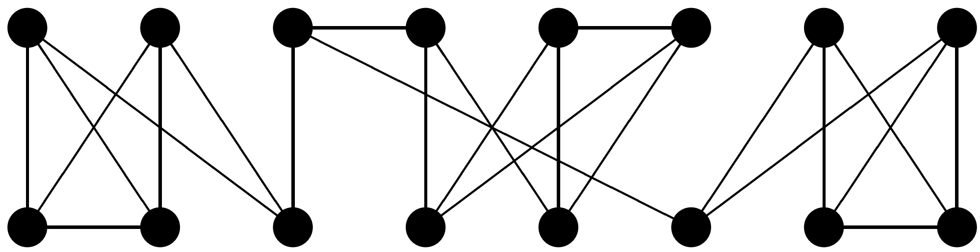
In de praktijk van het bemiddelingsbureau zal de graaf niet gauw deze eigenschap hebben, maar het is eerlijk gezegd ook geen realistische toepassing. Het voorbeeld is alleen van belang om het probleem duidelijk te maken (zoals ook bij het receptievoorbeeld het geval was). Hier is een tweedelingsgraaf, waarbij elk knooppunt drie buren heeft.



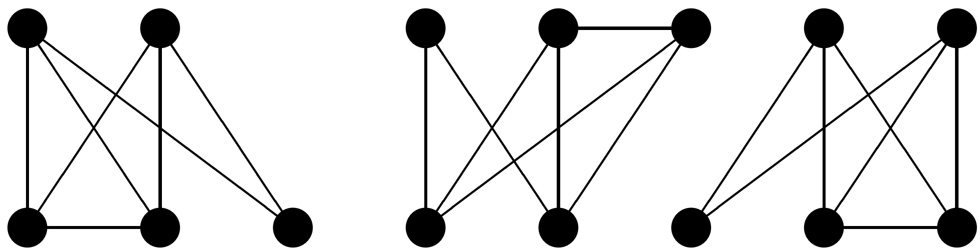
Volgens stelling 5 is er dus een perfecte koppeling. Die is hieronder in groen aangegeven.



König leefde 100 jaar geleden. De stelling is niet meer van deze tijd. Het zou duiden op maatschappelijk onbegrip als er geen rekening wordt gehouden met homo- en biseksualiteit, en dat is zeker op een universiteit met 'understanding society' als motto uit den boze. Daarom ligt het voor de hand te vragen wat er van Königs stelling overblijft als de onderliggende graaf geen tweedelingsgraaf is. We zullen zien dat de bewering dan niet meer in alle gevallen waar is. Königs stelling geldt dus niet voor onze moderne samenleving. Om dit in te zien beschouwen we het volgende voorbeeld.



Elk knooppunt heeft nog steeds drie buren, maar de graaf is geen tweedelingsgraaf meer. Vier van alle mogelijke koppelingen bestaan uit homoparen. Er is echter geen perfecte koppeling mogelijk. Immers, als er een perfecte koppeling zou zijn, dan zijn er nog steeds zeven koppels mogelijk als de derde vrouw zich terug trekt. Maar dan valt de graaf uiteen in drie losse stukken met elk vijf knooppunten (zie onderstaande figuur). In elk los stuk zijn maximaal twee koppels te maken. Dus in totaal zijn er nu niet meer dan zes koppels mogelijk, en geen zeven.



Wat heeft dit nu van doen met eigenwaarden? Daar elk punt precies 3 buren heeft, is de grootste eigenwaarde 3 (stelling 4). De op een na grootste eigenwaarde (laten we die H noemen) kan met wat inspanning ook bepaald worden, met als uitkomst:

$$H = \frac{1 + \sqrt[3]{1 + 3\sqrt{-762}} + \sqrt[3]{1 - 3\sqrt{-762}}}{3}.$$

Sommigen zullen misschien schrikken van de negatieve getallen onder het wortelteken; het betekent echter alleen dat er bij de berekening als tussenresultaat imaginaire getallen optreden. De einduitkomst is reëel en ongeveer gelijk aan 2.8558. Zonder imaginaire getallen zou de formule veel ingewikkelder worden. Het is een mooi voorbeeld van een berekening die eenvoudig wordt door haar complex te maken. De stelling waarvan ik u deelgenoot wil maken luidt als volgt.

Stelling 6. Een graaf waarin elke knoop precies drie buren heeft, en waarvan de tweede eigenwaarde kleiner is dan H, heeft een perfecte koppeling.

Het getal $H \approx 2.8558$ ligt erg dicht bij de grootste eigenwaarde 3. Voor verreweg de meeste grafen is de tweede eigenwaarde veel kleiner dan de grootste. Voor de eenvoud heb ik me beperkt tot drie buren per knooppunt. Maar voor elk constant aantal buren K is er een zo'n getal H. In alle gevallen ligt de waarde van H zeer dicht bij de grootste eigenwaarde K. Stelling 6 zegt dan ook in wezen dat de stelling van König in de meeste gevallen nog steeds geldig is, en dat de tweede eigenwaarde aangeeft wanneer dat met zekerheid het geval is.

Het is me opgevallen dat vrijwel niemand aantekeningen maakt. Waarschijnlijk rekent iedereen erop dat er een gedrukte versie zal worden uitgedeeld. Dat is echter een foute veronderstelling. Het is milieuvriendelijker, goedkoper en eenvoudiger de tekst via internet beschikbaar te maken. En dat heb ik ook gedaan. U kunt daarvoor bij Google zoeken onder 'Discreet en Mooi', maar dat is niet zonder risico. Beter is met mijn naam als zoekterm naar mijn webpagina te gaan, waar een link te vinden is naar deze tekst.

Overigens is het boven gegeven argument ook geldig voor wetenschappelijke artikelen. De behoefte aan gedrukte publicaties is verdwenen. Daarmee is de rol van de commerciële uitgeverijen wat betreft wetenschappelijke tijdschriften in wezen uitgespeeld. Het schrijven en beoordelen van de artikelen werd altijd al kosteloos gedaan door de wetenschappers. De enige serieuse taak van de uitgeverij was het drukken. Als gevolg van deze ontwikkeling bestaan er nu gratis toegankelijke elektronische tijdschriften op allerlei wetenschappelijke gebieden, die geheel beheerd worden door de wetenschappers zelf. Bestaande uitgeverijen, die veel geld vragen voor hun producten, proberen door middel van de opgebouwde status van hun tijdschriften deze ontwikkeling te overleven. Artikelen krijgen meer aanzien als ze worden gepubliceerd in een tijdschrift met hoge status. Veel onderzoeksinstellingen, waaronder onze faculteit, doen daaraan mee en stimuleren publicaties in zogenaamde toptijdschriften. Maar het is natuurlijk zo dat de kwaliteit van een tijdschrift wordt bepaald door de artikelen, en niet andersom. Als je als onderzoeksinstelling vindt dat je kwaliteit levert, maakt de status van het tijdschrift niet uit. Alleen de toegankelijkheid is belangrijk. Het zou dan ook van zelfvertrouwen en verstandig beleid getuigen als het publiceren in gratis elektronische tijdschriften gestimuleerd zou worden.

Beste mensen,

Ik werk nu bijna 25 jaar aan deze universiteit, en ik ben dankbaar dat ik al die tijd onderzoek heb kunnen doen in de discrete wiskunde, en dat ik me daarbij heb mogen laten leiden door wat ik interessant, leuk en mooi vind. Ik besef heel goed dat zoiets, zeker in een omgeving van economen, niet vanzelfsprekend is, en ik waardeer het des te meer dat het toch zover is gekomen dat ik hier nu deze rede kan houden. Hierbij is de steun van een aantal collega's binnen en buiten deze universiteit van groot belang geweest. Ik wil ze allemaal hartelijk bedanken. Ik weet echter niet precies wie dit zijn, omdat een groot deel van het benoemingsproces zich achter de schermen voltrekt. Maar van twee personen weet ik het zeker: het departementshoofd Bas Werker, en zijn voorganger Peter Borm.

Ik heb altijd met plezier gewerkt aan onderwijs en onderzoek. Dit was mogelijk door een erg prettige omgang met studenten en collega's, in het bijzonder de medewerkers van het departement Econometrie en Operationele Research. Ik ga ze niet allemaal opnoemen, maar wil wel de collegialiteit illustreren door te wijzen op een aantal jongere collega hoogleraren, die weliswaar eerder zijn benoemd dan ik, maar die, uit respect voor mijn senioriteit, met hun inauguratie hebben gewacht tot na vandaag. Mijnheer de rector, u gaat een drukke tijd tegemoet.

Onderzoek doen kan ik niet op mijn eentje. Ik dank alle wiskundigen (discreet of niet) die met mij hebben willen samenwerken. Een goede afspiegeling van deze groep is de lijst van medeauteurs. Ik heb er 45 geteld. Een aantal van hen verdient extra aandacht. Op de eerste plaats mijn promotoren van 30 jaar geleden: Jaap Seidel en Jack van Lint. Helaas zijn beiden overleden. Zij hebben bij mij de liefde voor de discrete wiskunde aangewakkerd, en veel bruikbare wiskundige bagage meegegeven. Twee andere belangrijke namen zijn René Peeters en Edwin van Dam. Beiden waren zij doctoraalstudent onder mijn hoede. Ik hoop dat ik ze iets van de door mij geërfde discrete bagage en liefde voor het vak heb kunnen meegeven. Ze zijn nu mijn naaste collega's, en betekenen veel voor mij. Ze zijn de organisatoren van het symposium, eerder deze dag. Bedankt jongens. Speciale dank verdienen ook Andries Brouwer en Aart Blokhuis. Zij zijn mijn klankbord van de Technische Universiteit Eindhoven. Andries is de coauteur met wie ik de meeste artikelen geschreven heb, en Aart is mijn enige wetenschappelijke broer, en spreker op het symposium van vanmiddag. Ik dank ook de andere sprekers van vanmiddag: Frank De Clerck en Lex Schrijver. Zij zijn geen coauteur, maar hadden dat eigenlijk al lang moeten zijn. Misschien kunnen we hier binnenkort iets aan doen. Lex verdient extra vermelding. Hij en Giel Paardekooper waren in 1985 de hoogleraren aan de Katholieke Hogeschool Tilburg (zoals deze universiteit toen heette), die ervoor gezorgd hebben dat ik hier kon komen werken. Het was waarschijnlijk de belangrijkste stap in mijn loopbaan. Heren, ontzettend bedankt.

Vrienden, familie en bekenden. Bedankt voor jullie aanwezigheid, hier en nu, maar ook op al die andere plekken en tijdstippen waar en waarop jullie er bij waren.

Een van de voordelen van een inauguratie op latere leeftijd is dat je kleinkinderen het kunnen meemaken. Mijn gezin met aanhang neemt een groot deel van de eerste rij in beslag, en daar ben ik trots op.

Ank, de laatste regels zijn voor jouw. Spil van het gezin, oma van vijf, moeder van drie, en echtgenote van een. En elke rol vervul je met verve. Al meer dan veertig jaar ben jij mijn steun en toeverlaat voor lief en voor leed. Mooi en discreet.

Ik heb gezegd.

Referenties

[1] A.E. Brouwer and W.H. Haemers, Perfect matchings and eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **395** (2005), 155-162.

[2] S.M. Cioabă, D.A. Gregory and W.H. Haemers, Matchings in regular graphs from eigenvalues, *J. Combinatorial Theory B* **99** (2009), 287-297.

[3] N. Kim, N. Shiffeldrim, H.H. Gan and T. Schlick, Candidates for novel RNA topologies, *Journal of Molecular Biology* **341** (2004), 1129-1144

[4] D. König, Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. **77** (1916), 453-465.

[5] A. Pinto, R. van Leuken, M. Fatih Demirci, F. Wiering and R. Veltkamp, Indexing Music Collections through Graph Spectra, *8th International Conference on Music Information Retrieval - ISMIR 2007*, Vienna, Austria, September 23-27, 2007.

[6] Y. Wang, X.-C. Yun and Y.-F. Li, Measuring and characterizing topologies of P2P networks, *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software* **19** (2008), 981-992.

[7] R.C. Wilson and P. Zhu, A study of graph spectra for comparing graphs and trees, *Pattern Recognition* **41** (2008), 2833-2841.